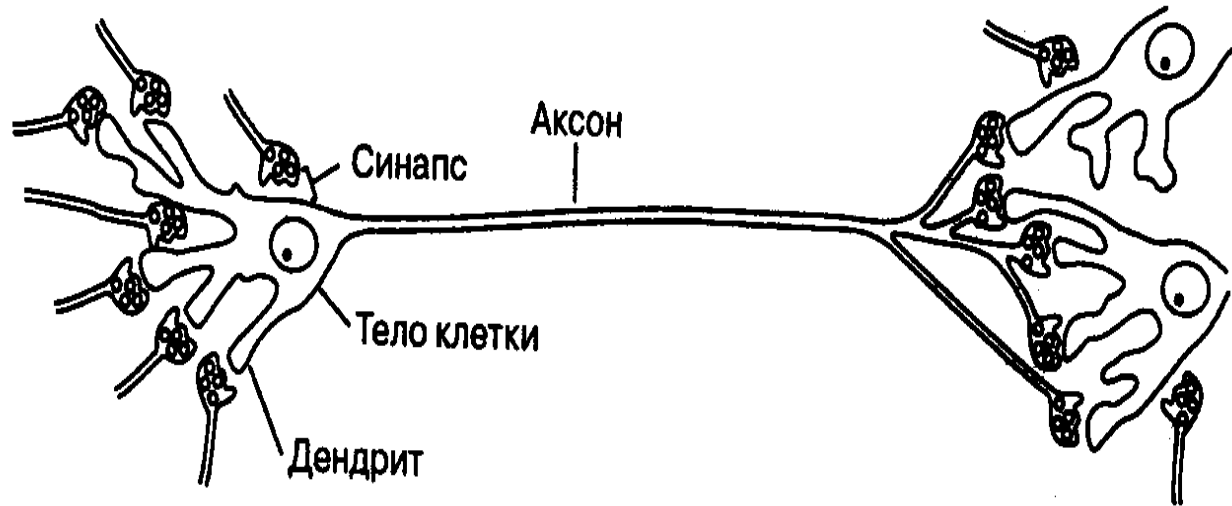


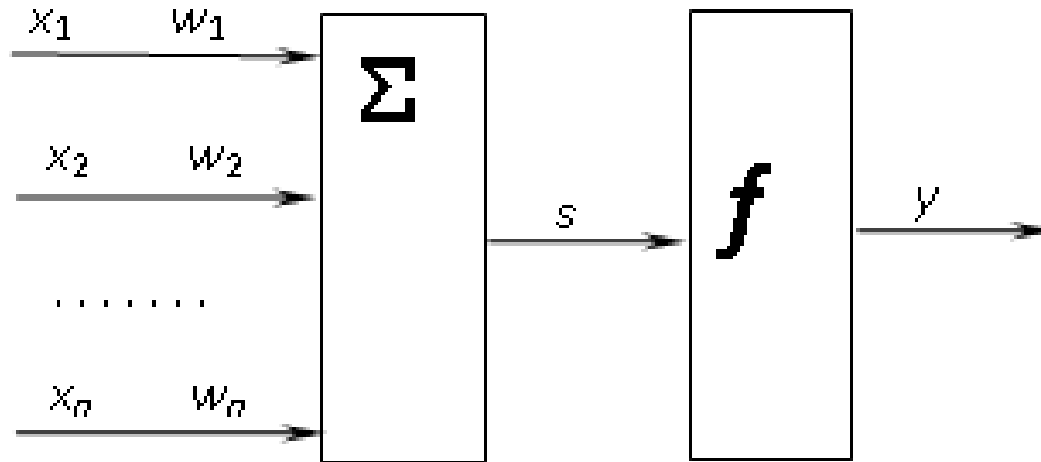
Нейронные сети

Мозг человека содержит около 100 миллиардов нейронов, каждый из которых имеет в среднем 10 000 связей.



Входные сигналы дендритного дерева суммируются в соме. Если результат не превышает некоторого порога, то выходной сигнал не формируется вовсе – нейрон «не срабатывает». Выходной сигнал проходит по ветвям аксона и достигает синапсов, которые соединяют аксоны с дендритными деревьями других нейронов. Через синапсы сигнал трансформируется в новый входной сигнал для смежных нейронов. Величина входного сигнала, генерируемого синапсом, может быть различной даже при одинаковой величине сигнала, приходящего в синапс. Эти различия определяются эффективностью или весом синапса, причем это вес может изменяться в процессе функционирования синапса.

Искусственный нейрон



$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор входных сигналов (от других нейронов)

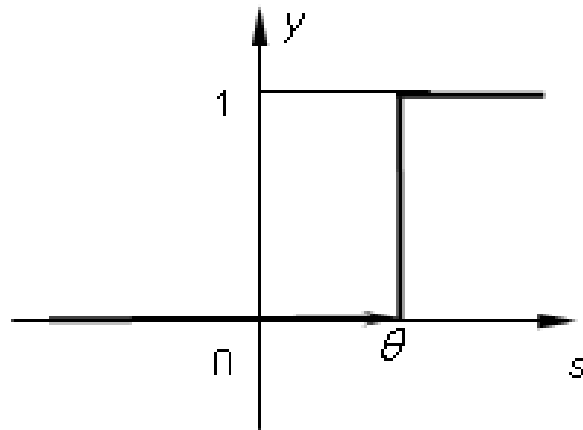
$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ – вектор весовых коэффициентов или весов связей

$s = \mathbf{w}\mathbf{x}^T$ – выход блока суммирования

$y = f(s - \theta)$ – выходной сигнал нейрона от **нелинейной** функции f ,
где θ – постоянное смещение (аналог порога
возбуждения биологического нейрона)

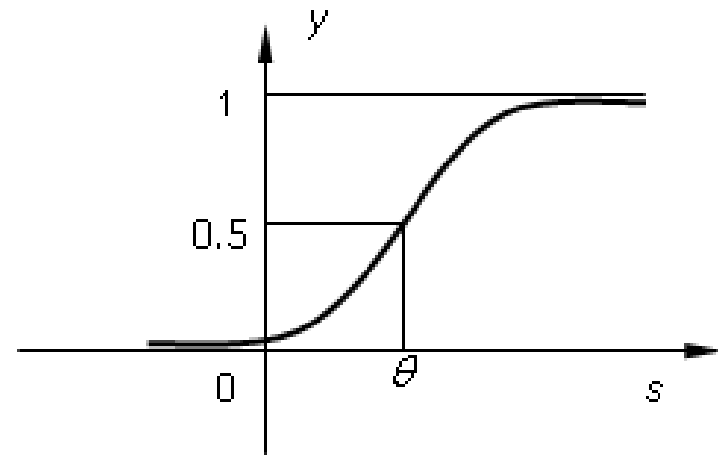
Функции возбуждения

Бинарная



$$y = \begin{cases} 1 & \text{если } s - \theta \geq 0 \\ 0 & \text{если } s - \theta < 0 \end{cases}$$

Сигмоидальная



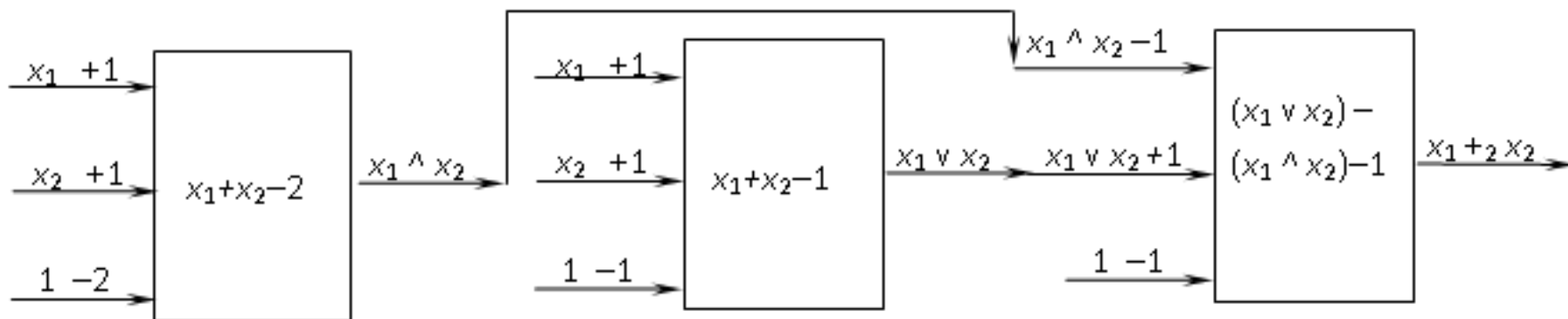
$$y = 1 / (1 + e^{-(s-\theta)})$$

Порог возбуждения у каждого нейрона **настраивается** в процессе обучения вместе с элементами вектора весовых коэффициентов. Для этого к вектору входных сигналов нейрона добавляется единичный сигнал $x_0 = 1$, а соответствующий ему весовой коэффициент w_0 после обучения данного нейрона становится равным $-\theta$. В таком случае, т.е. при добавлении в сеть входного **нейрона смещения** X_0 ($x_0 = 1$ всегда), порог возбуждения в формулах для каждого нейрона принимается нулевым.

Выполнение логических операций

Модель МакКаллока – Питтса.

Нейроны имеют два состояния – 0, 1. Функция возбуждения бинарная.



| x_1 | x_2 | y |
|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$y = x_1 \wedge x_2$$

| x_1 | x_2 | y |
|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$$y = x_1 \vee x_2$$

| x_1 | x_2 | y |
|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$$y = x_1 (+)_2 x_2$$

Нейронная сеть

В основу искусственных нейронных сетей положены следующие свойства естественных нейронных сетей:

- простой обрабатывающий элемент – нейрон;
- очень большое число нейронов участвует в обработке информации;
- один нейрон связан с большим числом других нейронов;
- изменяющиеся по весу связи между нейронами (**обучение**);
- **параллельность обработки информации.**

Нейронные сети бывают **однослойные и многослойные**, не считая входного слоя нейронов.

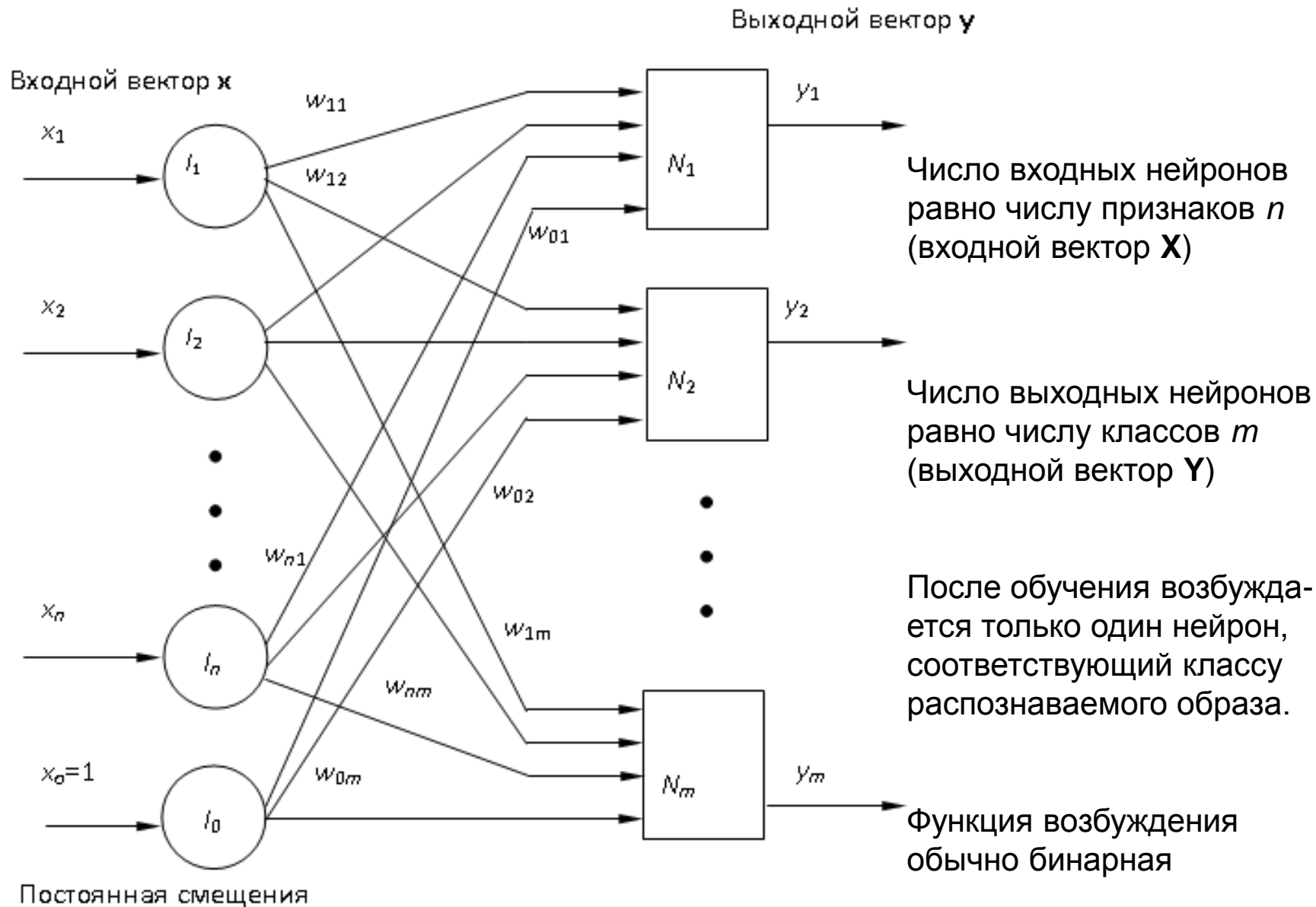
Входной слой – аналог рецепторных нейронов (глаз, ухо). Его задача распределить входную информацию по нейронам следующего слоя.

Нейронные сети предназначены **для распознавания** образов.

На вход подается вектор признаков распознаваемого образа.

На выходе обученной сети – код класса, к которому отнесен образ.

Однослойная нейронная сеть



Обучение однослойной сети

Элемент обучающего множества – пара векторов (\mathbf{X}, \mathbf{T})

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – входной вектор (признаки образа)

$\mathbf{T} = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ – выходной вектор ($t_j = 1$, если образ относится к j -му классу, остальные $t = 0$)

Перед обучением инициализация весов, например, обнуление ($w_{ji} = 0$). При обучении веса изменяются. Если после предъявления очередного образа из обучающего множества выходные нейроны срабатывают правильно ($\mathbf{T} = \mathbf{Y}$), то веса не изменяются. Если неправильно, то

$$w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) + \Delta w_{ij}(k+1); \quad \Delta w_{ij}(k+1) = \eta \delta_j x_i; \quad \delta_j = t_j - y_j$$

где $w_{ij}(k)$ – вес, на предыдущем k -ом шаге ($k = 0$ – инициализация), η – скорость обучения ($\eta = 1,0 - 0,1$), δ_j – ошибка j -го нейрона выходного слоя, t_j и y_j – соответственно желаемое и полученное на данном шаге значение на выходе j -го нейрона выходного слоя.

Предъявление образов продолжается, пока сеть не научится **все** их распознавать, если это вообще возможно.

Замечание. Метод обучения однослойной нейронной сети напоминает метод самообучения распознаванию образов с помощью решающей матрицы.

Пример обучения

Элементы входного вектора могут принимать только бинарные значения (0,1). Функция возбуждения бинарная. Скорость обучения $\eta = 1$. Тогда $w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) + (t_j - y_j) x_i$. Веса будут только целочисленные.

Если $t_j = y_j$, то $w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k)$.

Если $t_j = 1, y_j = 0$, то $w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) + x_i$.

Если $t_j = 0, y_j = 1$, то $w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) - x_i$.

$\mathbf{X}^{(1)}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

$\mathbf{X}^{(2)}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

$\mathbf{W}^{(1)}$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

$\mathbf{W}^{(2)}$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

темная клетка «1» светлая «0»

Вес смещения: $w_{01} = 0$

$w_{02} = 0$

Сеть из двух нейронов, входных нейронов 9 и нейрон смещения ($x_0 = 1$).

Пусть первый нейрон реагирует на $\mathbf{x}^{(1)}$, второй – на $\mathbf{x}^{(2)}$.

Обучающее множество: $\{(\mathbf{X}^{(1)} = (1,0,1,1,1,1,0,0,1), \mathbf{T}^{(1)} = (1,0));$

$(\mathbf{X}^{(2)} = (1,1,1,1,0,1,1,0,1), \mathbf{T}^{(2)} = (0,1))\}$.

Матрица весов: $\mathbf{W}(0) = 0$, т.е. $\mathbf{W}_{i1} = 0, \mathbf{W}_{i2} = 0$ ($i=0, \dots, 9$).

Пример обучения

Подаем входные вектора и сравнивая значения векторов \mathbf{Y} и \mathbf{T} изменяем веса

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|---|----|----|---|----|-----------------------------|----------|---|----|----|----|----|---|----|----|---|----|--|----|---|----|----|----|----|---|---|----|-----------------------------|----------|--|----|---|----|----|----|----|---|---|----|
| $X^{(1)}$ <table><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> $x_0 = 1$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $W^{(1)}(0)$ <table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | s 0 0 0 0 | y 1 | $W^{(1)}(1)$ <table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $W^{(2)}(0)$ <table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | s 0 0 0 0 | y 1 | $W^{(2)}(1) \llcorner - \gg$ <table><tr><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>-1</td></tr></table> $w_0 = -1$ | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | -1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $X^{(2)}$ <table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> $x_0 = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | $W^{(1)}(1)$ <table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | s 0 0 0 0 | y 1 | $W^{(1)}(2) \llcorner - \gg$ <table><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td></tr></table> $w_0 = -1$ | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -1 | 0 | -1 | $W^{(2)}(1)$ <table><tr><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>-1</td></tr></table> $w_0 = -1$ | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | -1 | s -2 -2 -1 -1 | y 0 | $W^{(2)}(2) \llcorner + \gg$ <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $X^{(1)}$ <table><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> $x_0 = 1$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $W^{(1)}(2)$ <table><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td></tr></table> $w_0 = -1$ | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -1 | 0 | -1 | s -2 -2 -1 -1 | y 0 | $W^{(1)}(3) \llcorner + \gg$ <table><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | $W^{(2)}(2)$ <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | s 0 -1 0 0 | y 0 | $W^{(2)}(3)$ <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Пример обучения

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|----|---|---|---------------------------|----------|---|---|----|---|---|---|---|----|---|---|--|---|---|---|---|----|---|---|---|---|--------------------------|----------|--|---|---|---|---|----|---|---|---|---|
| $X^{(2)}$ <table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> $x_0 = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | $W^{(1)}(3)$ <table><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | s -1 0 -1 0 | y 0 | $W^{(1)}(4)$ <table><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | $W^{(2)}(3)$ <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | s 1 0 1 0 | y 1 | $W^{(2)}(4)$ <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $X^{(1)}$ <table><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> $x_0 = 1$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $W^{(1)}(4)$ <table><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | s 0 1 0 0 | y 1 | $W^{(1)}(5)$ <table><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | $W^{(2)}(4)$ <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | s 0 -1 0 0 | y 0 | $W^{(2)}(5)$ <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> $w_0 = 0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

После двух последних предъявлений коррекции весов не было, т.е. обучение сети закончено

Замечание. w_0 первого и второго нейронов равны нулю, т.е. в данном случае постоянная единица (нейрон смещения) не требуется.

Пример обучения

Изменение реакции нейронов и весовых коэффициентов в процессе обучения

| x | t | s | y | $t-y$ | w_{0j} | w_{1j} | w_{2j} | w_{3j} | w_{4j} | w_{5j} | w_{6j} | w_{7j} | w_{8j} | w_{9j} |
|---|---|----|---|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | -1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -1 | 0 | -1 |
| | 1 | -6 | 0 | +1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | -6 | 0 | +1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Проверка результата обучения

 $\mathbf{x}^{(1)}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Распознаваемые образы

 $\mathbf{x}^{(2)}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

 $\mathbf{w}^{(1)}$

| | | |
|----|----|---|
| 0 | -1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| -1 | 0 | 0 |

 $w_{01} = 0$ $\mathbf{w}^{(2)}$

| | | |
|---|----|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

 $w_{02} = 0$

Пусть надо распознать образ $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1, \mathbf{1}, 1, 1, 0, 1)$, отличающийся от $\mathbf{x}^{(2)}$ значением x_5 .
 $s_1 = -1$, $s_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Распознаваемый образ отнесен к классу 2.

Пусть надо распознать образ $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 1, \mathbf{0}, 1, 0, 0, 1)$, отличающийся от $\mathbf{x}^{(1)}$ значением x_5 .
 $s_1 = 0$, $s_2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$, $y_2 = 1$. Образ не распознан.

Проблема. В распознавании участвуют только три нейрона.

Пусть надо распознать образ $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, непохожий на образы $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$.

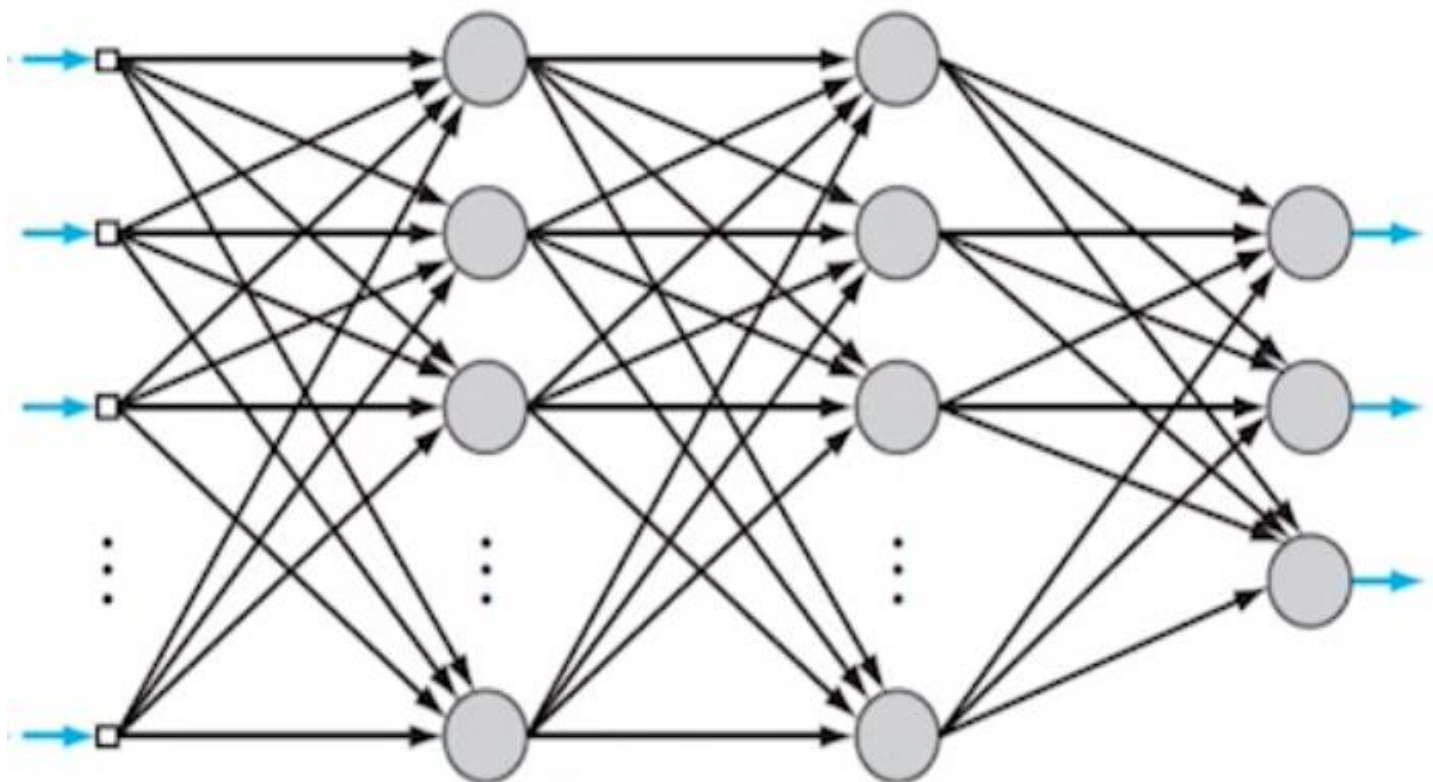
Тогда $s_1 = 1$, $s_2 = -1 \Rightarrow y_1 = 1$, $y_2 = 0$. Распознаваемый образ отнесен к классу 1.

Решение. Ввести дополнительный нейрон, выдающий на выходе единицу при наличии во входном векторе числа единиц больше порогового значения, например, пять и более единиц. Настройка весов такого нейрона имеет вид: $w_0 = 5$, $w_1 = \dots = w_9 = 1$.

После ввода в сеть дополнительного нейрона распознаваемый образ будет отнесен к первому классу, если $\mathbf{y} = (1, 0, 1)$, и ко второму классу, если $\mathbf{y} = (0, 1, 1)$. При $\mathbf{y} = (1, 0, 0)$ или $\mathbf{y} = (0, 1, 0)$ образ можно считать нераспознанным.

Многослойные сети

Нейронная сеть с двумя скрытыми (промежуточными) слоями



Каждый нейрон в слое связан со **всеми** нейронами следующего слоя.

Общее число связей соответствует произведению нейронов в каждом слое.

Проблема – в реальной сети очень много настраиваемых при обучении связей, по какому правилу изменять веса связей промежуточных слоев?

Многослойные сети

Проблема **однослойной** сети - она реализует только **линейную** разделяющую поверхность в пространстве признаков.

Многослойные сети реализуют **кусочно-линейную** поверхность, разделяющую образы в пространстве признаков.

Замечание. Нейронная сеть может обучиться правильному распознаванию только линейно разделимых классов из обучающего множества.

Проблемы, возникающие при реализации многослойной сети:

- При разработке структуры сети - нет критериев для задания числа слоев и числа нейронов в каждом слое (известно только число нейронов во входном и выходном слое).
- При обучении сети – трудно определить степень влияния каждого нейрона из скрытых слоев на ошибку при распознавании.
- При анализе обучающего множества - трудно заранее определить линейную разделимость классов.

Возможное решение.

Структура подбирается экспериментально, начиная с более простых.

Обучение методом обратного распространения ошибки.

Замечание. Функция возбуждения нейронов в многослойных сетях сигмоидальная.

Обратное распространение ошибки

Цель - изменять вес каждой связи на величину, пропорциональную скорости, с которой изменяется ошибка при изменении веса (E_W - производная ошибки по весу).

Алгоритм находит E_W для каждой связи, вычисляя δ – скорость, с которой изменяется ошибка при изменении уровня активности нейрона.

Для j -го нейрона **выходного** слоя: $\delta_j = y_j(1 - y_j)(t_j - y_j)$.

Замечание. У нейронов с сигмоидальным возбуждением $dy/ds = y(1 - y)$.

Для i -го нейрона **промежуточного** слоя $p-1$:
$$\delta_i^{(p-1)} = y_i(1 - y_i) \sum_{j=1}^{N(p)} \delta_j^{(p)} w_{ij}^{(p)},$$

где $N(p)$ – число нейронов в слое p (для выходного слоя $N(p) = m$); y_i – выход i -го нейрона из слоя $p-1$; $\delta_j^{(p)}$ – ошибка j -го нейрона в слое p ; $w_{ij}^{(p)}$ – вес связи между i -м нейроном слоя $p-1$ и j -м нейроном слоя p .

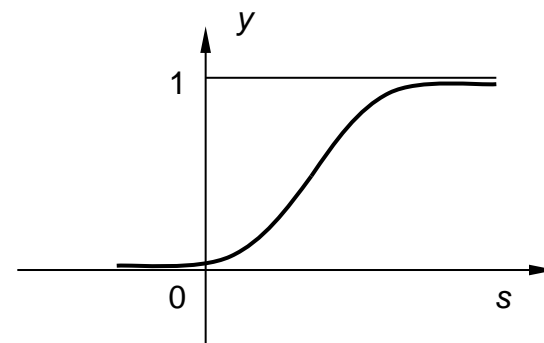
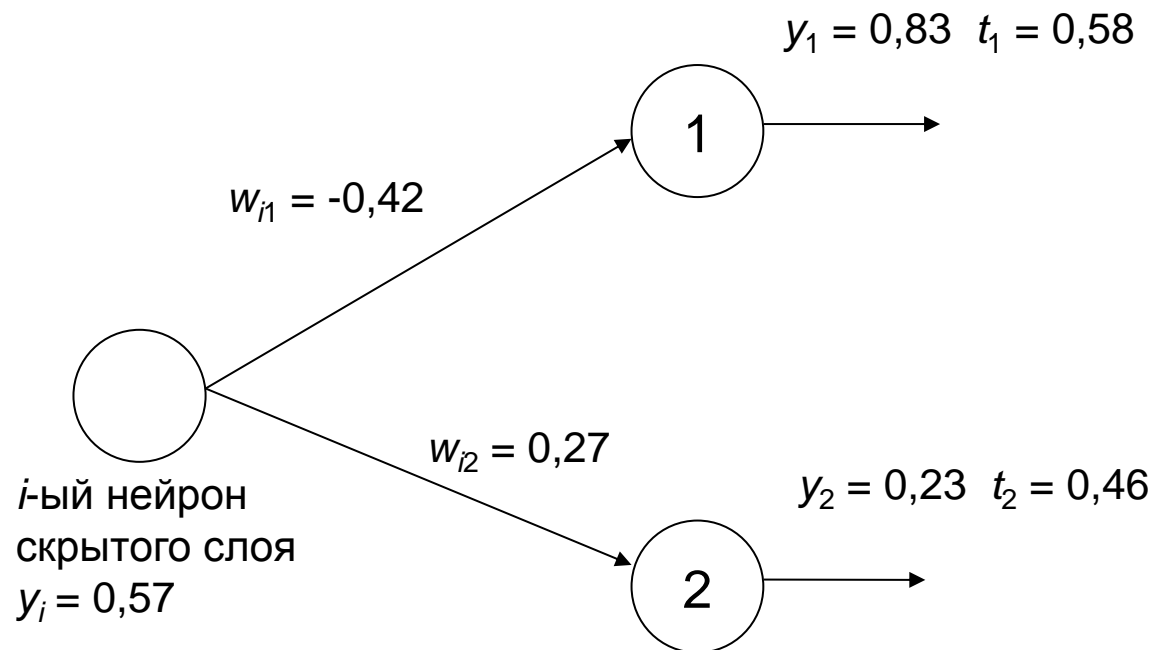
На шаге $k+1$ весовые коэффициенты j -го нейрона слоя p корректируются:

$$w_{ij}^{(p)}(k+1) = w_{ij}^{(p)}(k) + \Delta w_{ij}^{(p)}(k+1); \Delta w_{ij}^{(p)}(k+1) = \eta \delta_j^{(p)} y_i^{(p-1)} + \alpha \Delta w_{ij}^{(p)}(k),$$

где α – коэффициент коррекции ($\alpha = 0 - 0.5$), $y_i^{(p-1)}$ – выход i -го нейрона из слоя $p-1$.

При корректировке весового коэффициента w_{0j} j -го нейрона слоя p $y_0^{(p-1)} = 1$, т.к. это вес связи между нейроном смещения, постоянно выдающим единицу на все нейроны всех слоев, и j -м нейроном слоя p .

Пример обучения



Сигмоидальная функция

Скорость обучения $\eta = 0,4$

Выходной слой (2 нейрона)

Проблема – выход на насыщение

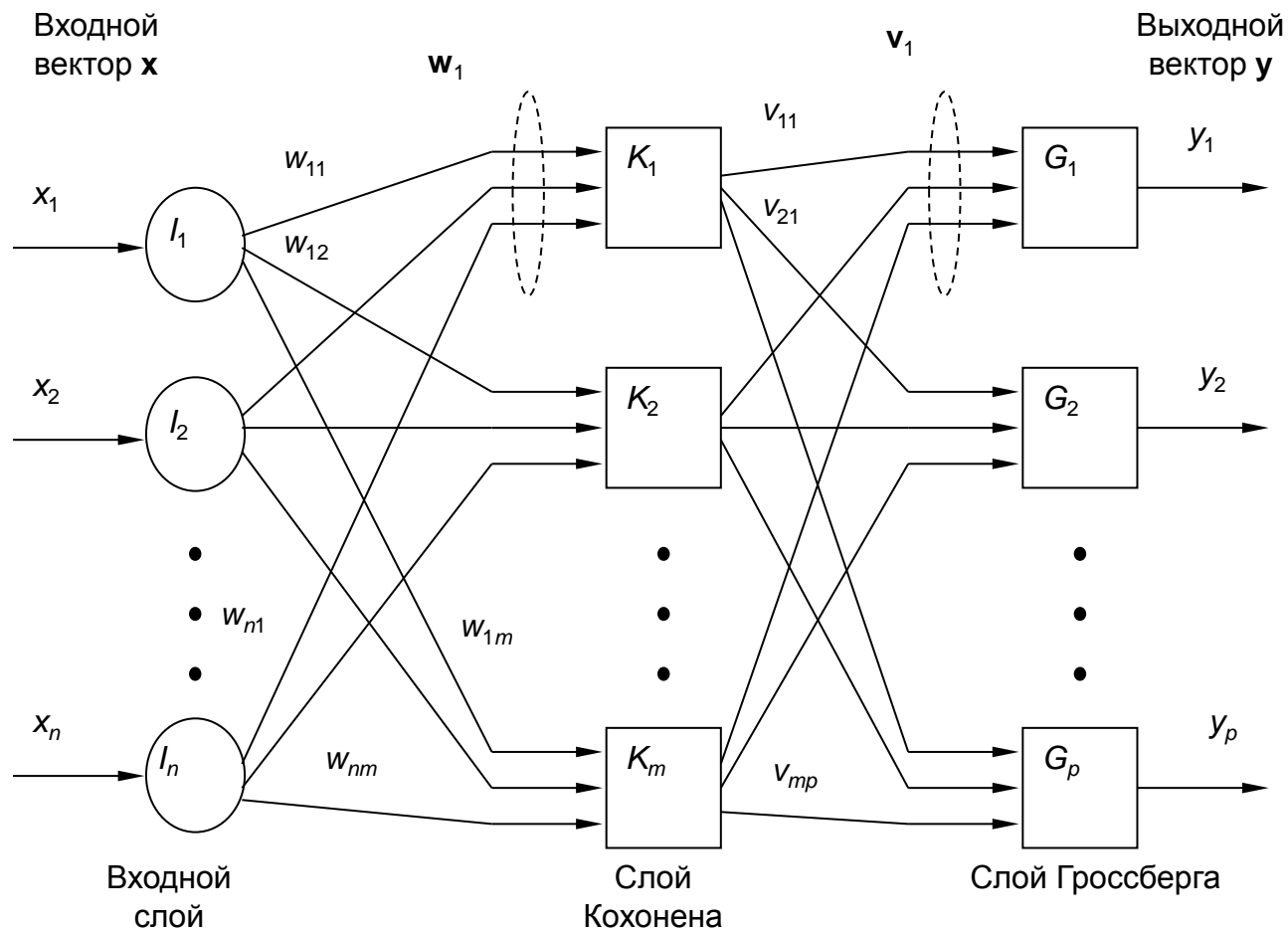
Ошибки нейронов:

- $\delta_1 = y_1(1 - y_1)(t_1 - y_1) = 0,83(1 - 0,83)(0,58 - 0,83) = -0,035$;
- $\delta_2 = y_2(1 - y_2)(t_2 - y_2) = 0,23(1 - 0,23)(0,46 - 0,23) = 0,041$;
- $\delta_i = y_i(1 - y_i)(w_{i1}\delta_1 + w_{i2}\delta_2) = 0,57(1 - 0,57)((-0,42)*(-0,035) + 0,27*0,041) = 0,0063$.

Новые весовые коэффициенты связей i -го нейрона:

- $w_{i1}' = w_{i1} + \eta\delta_i y_i = -0,42 + 0,4(-0,035)0,57 = -0,428$
- $w_{i2}' = w_{i2} + \eta\delta_i y_i = 0,27 + 0,4(0,041)0,57 = 0,279$.

Сеть встречного распространения



Может работать как: преобразователь кодов, ассоциативная память с возможностью коррекции ошибок, кластеризатор образов

Режимы работы сети

Рабочий режим

Слой Кохонена работает по алгоритму «победитель забирает все».

Для каждого j -го нейрона слоя вычисляется уровень возбуждения s : $s_j = \mathbf{w}_j \mathbf{x}^T$. Нейрон с максимальным значением s выдает на выходе единицу, все остальные выдают ноль, формируя вектор \mathbf{y} . Фактически для реализации данного алгоритма в слой Кохонена необходимо добавить блок сравнения, на вход которого подаются уровни возбуждения всех нейронов слоя Кохонена, а с выхода снимается сформированный блоком вектор \mathbf{y} .

Выход слоя Гроссберга является взвешенной суммой выходов нейронов слоя Кохонена. Для i -го нейрона слоя Гроссберга $s_i = \mathbf{v}_i \mathbf{y}^T$.

Учитывая, что в векторе \mathbf{y} только одна единица, а остальное - нули, каждый нейрон слоя Гроссберга выдает **вес связи** между этим нейроном и одним нейроном слоя Кохонена.

Режим обучения

Элементы **обучающего множества** – пары векторов (входной \mathbf{x} и выходной \mathbf{y}). Число нейронов слоя Кохонена равна числу классов. Обучение каждого нейрона слоя Кохонена – приравнивание вектора признаков центра класса в пространстве признаков вектору весовых коэффициентов.

Настройка нейронов слоя Гроссберга - установка значений весов тех связей, который связывают нейроны слоя с единственным ненулевым в данный момент нейроном слоя Кохонена так, чтобы на выходе сети получить требуемый вектор \mathbf{y} .

Пример работы системы

Цель. Хранение и восстановление частично искаженной информации - два вектора с бинарными значениями элементов: $\mathbf{x}_1 = (1,1,1,0,0,0)$ и $\mathbf{x}_2 = (0,0,0,1,1,1)$.

Структура. Число нейронов нулевого слоя $n = 6$, число нейронов слоя Кохонена $m = 2$, число нейронов слоя Гроссберга $p = 6$.

Начальная настройка весов нейронов Кохонена произвольная: ($w_{11}=0.1$, $w_{21}=0.2$, $w_{31}=0.3$, $w_{41}=0.4$, $w_{51}=0.5$, $w_{61}=0.6$); ($w_{12}=0.6$, $w_{22}=0.5$, $w_{32}=0.4$, $w_{42}=0.3$, $w_{52}=0.2$, $w_{62}=0.1$).

Скорость обучения $\eta = 1$.

Обучение.

Настройка слоя Кохонена. На вход \mathbf{x}_1 , тогда $s_1=0.6$, $s_2=1.5$, т.е. «победитель» – нейрон 2. Его новые веса по формуле: $\mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_2 + 1.0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{w}_2)$, фактически $\mathbf{w}_2' = \mathbf{x}_1$. Тогда: $w_{12}=1.0$, $w_{22}=1.0$, $w_{32}=1.0$, $w_{42}=0.0$, $w_{52}=0.0$, $w_{62}=0.0$.

На вход \mathbf{x}_2 , тогда $s_1=1.5$, $s_2=0.0$, т.е. «победитель» – нейрон 1. Его новые веса: $w_{11}=0.0$, $w_{21}=0.0$, $w_{31}=0.0$, $w_{41}=1.0$, $w_{51}=1.0$, $w_{61}=1.0$. Настройка слоя Кохонена закончена.

Настройка слоя Гроссберга - установление таких весовых коэффициентов, чтобы выходной вектор совпадал с соответствующим ему входным вектором, т.е. ($v_{11}=0.0$, $v_{12}=0.0$, $v_{13}=0.0$, $v_{14}=1.0$, $v_{15}=1.0$, $v_{16}=1.0$); ($v_{21}=1.0$, $v_{22}=1.0$, $v_{23}=1.0$, $v_{24}=0.0$, $v_{25}=0.0$, $v_{26}=0.0$).

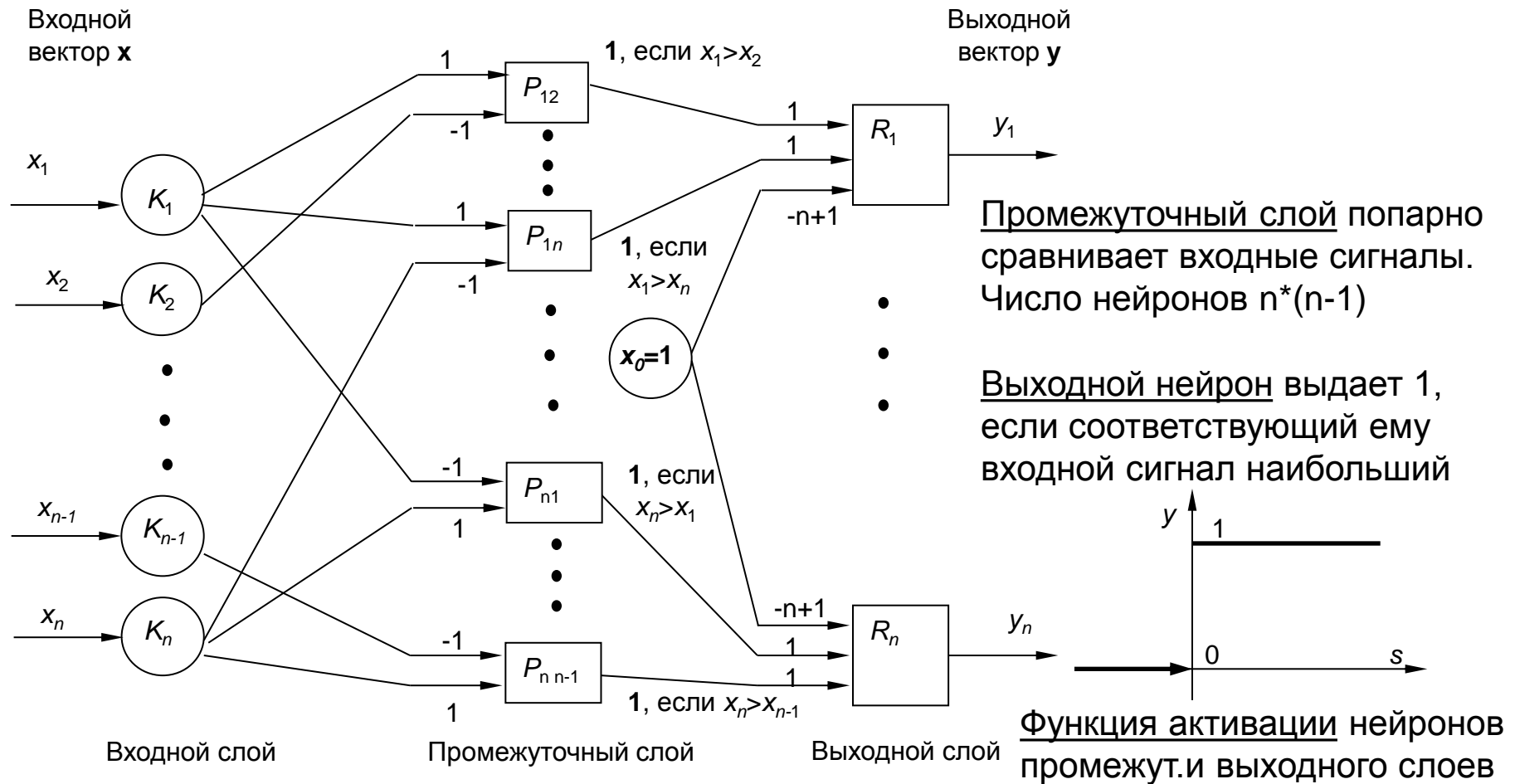
Настроенная таким образом сеть выдает на выходе правильный вектор, даже при незначительных ошибках во входном векторе.

Примеры.

На входе $\mathbf{x} = (1,1,1,0,0,1)$. Тогда $s_1=1$, $s_2=3$ – «победитель» – нейрон 2. $\mathbf{y} = (1,1,1,0,0,0)$.

На входе $\mathbf{x} = (1,1,0,0,0,1)$. Тогда $s_1=1$, $s_2=2$ – «победитель» – снова нейрон 2.

Сеть для сравнения ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ



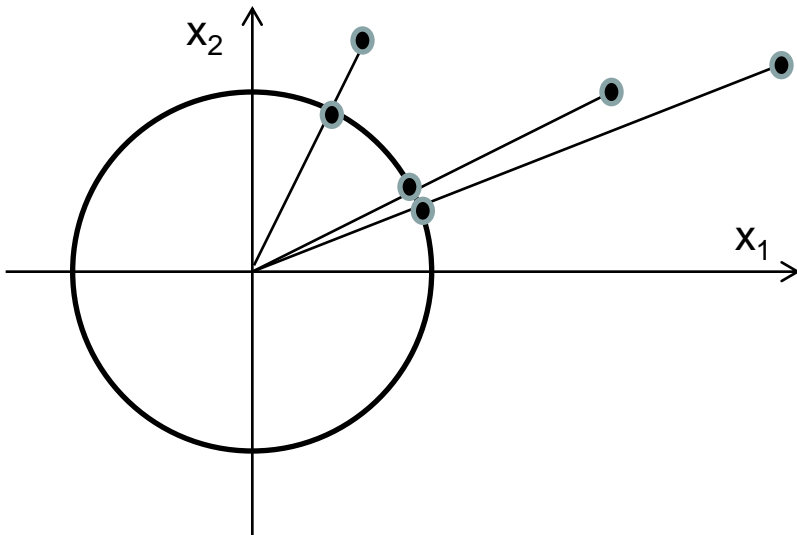
Замечание. Если максимальных сигналов во входном векторе несколько, то каждый из соответствующих им выходных нейронов выдает единицу

Обучение кластеризации

После обучения **слой Кохонена выполняет кластеризацию** входных векторов, а слой Гроссберга выдает код (номер) кластера.

Самообучение - в результате обучения непохожие друг на друга входные векторы должны активизировать разные нейроны, а похожие - один и тот же нейрон, но какой конкретно перед обучением не устанавливается.

Вектор весов j -го нейрона слоя Кохонена \mathbf{w}_j можно представить как точку в пространстве признаков с координатами w_{ij} . Максимизация функции $s = \mathbf{w}\mathbf{x}^T$ равнозначна минимизации функции $d = (\mathbf{w} - \mathbf{x})(\mathbf{w} - \mathbf{x})^T$, где d – Евклидово расстояние в пространстве признаков между точками, соответствующими векторам \mathbf{w} и \mathbf{x} . Изменение весов каждого нейрона Кохонена можно представить как перемещение соответствующей ему точки в пространстве признаков в положение наиболее близкое к центру соответствующего кластера.



Желательно перед предъявлением **нормализовать входные векторы** путем деления каждой компоненты вектора на его длину (кв. корень из суммы квадратов компонент вектора). В результате получим вектор единичной длины в n -мерном пространстве признаков (графически – стрелка от начала координат до точки на поверхности **единичной** гиперсферы в пространстве признаков, а все образы – точки на ней).

Обучение кластеризации

На шаге $k+1$ обучения выполняются следующие действия:

1. Для каждого j -го нейрона вычисляется расстояние между точками, соответствующими

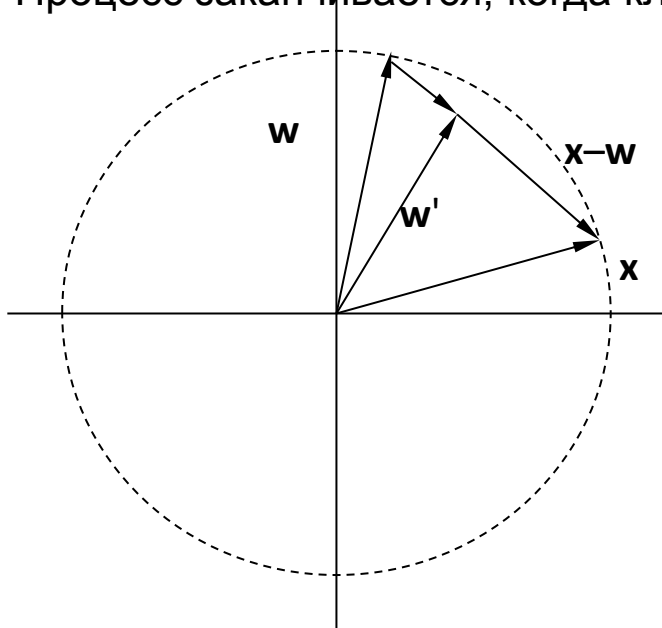
предъявленному вектору \mathbf{x} и вектору весов j -го нейрона \mathbf{w}_j :
$$d_j = \sum_{i=1}^n (w_{ij} - x_i)^2.$$

2. Находится нейрон с **минимальным** расстоянием d_j и для всех нейронов, находящихся от него на расстоянии не более радиуса активации r , выполняется **коррекция весов**

$w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) + \eta(x_i - w_{ij}(k))$, где η – скорость обучения ($\eta = 0,7 \dots 0,1$).

3. Предъявляется следующий вектор \mathbf{x} из кластеризуемого множества.

Радиус активации r и скорость обучения η в процессе обучения постепенно уменьшаются. Процесс заканчивается, когда кластеры стабилизируются.



В процессе обучения после предъявления похожих векторов \mathbf{x} вектор весов \mathbf{w} одного нейрона поворачивается, постепенно смещаясь к центру кластера (группы похожих образов с близкими векторами \mathbf{x}).

Проблема – выбор числа нейронов и задание их начальных весов.

Пример кластеризации

Задача. Кластеризация в трехмерном пространстве признаков множества образов

М: = (0.8, 0.7, 0.4); (0.6, 0.9, 0.9); (0.3, 0.4, 0.1); (0.1, 0.1, 0.3).

В слое Кохонена два нейрона. Радиус активации $r = 0$, скорость обучения $\eta = 0.5$.

На k -ом шаге обучения вектора весов: $\mathbf{w}_1(k) = (0.5, 0.6, 0.8)$; $\mathbf{w}_2(k) = (0.4, 0.2, 0.5)$.

На вход элемент 1.

$$d_1 = (0.5 - 0.8)^2 + (0.6 - 0.7)^2 + (0.8 - 0.4)^2 = 0.26; d_2 = (0.4 - 0.8)^2 + (0.2 - 0.7)^2 + (0.5 - 0.4)^2 = 0.42.$$

$d_1 < d_2 \Rightarrow$ корректируется только вектор \mathbf{w}_1 : $\mathbf{w}_1(k+1) = (0.65, 0.65, 0.60)$.

$$w_{11}(k+1) = w_{11}(k) + \eta(x_1 - w_{11}(k)), \text{ т.е. } 0.5 + 0.5(0.8 - 0.5) = 0.5 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.65$$

На вход элемент 2.

$$d_1 = (0.65 - 0.6)^2 + (0.65 - 0.9)^2 + (0.60 - 0.9)^2 = 0.155; d_2 = (0.4 - 0.6)^2 + (0.2 - 0.9)^2 + (0.5 - 0.9)^2 = 0.69.$$

$d_1 < d_2$, корректируется только вектор \mathbf{w}_1 : $\mathbf{w}_1(k+1) = (0.625, 0.775, 0.750)$.

На вход элемент 3.

$$d_1 = (0.625 - 0.3)^2 + (0.775 - 0.4)^2 + (0.75 - 0.1)^2 = 0.67; d_2 = (0.4 - 0.3)^2 + (0.2 - 0.4)^2 + (0.5 - 0.1)^2 = 0.21.$$

$d_2 < d_1$, корректируется только вектор \mathbf{w}_2 : $\mathbf{w}_2(k+1) = (0.35, 0.3, 0.3)$.

На вход элемент 4.

$$d_1 = (0.625 - 0.1)^2 + (0.775 - 0.1)^2 + (0.75 - 0.3)^2 = 0.93; d_2 = (0.35 - 0.1)^2 + (0.3 - 0.1)^2 + (0.3 - 0.3)^2 = 0.$$

$d_2 < d_1$, корректируется только вектор \mathbf{w}_2 : $\mathbf{w}_2(k+1) = (0.225, 0.2, 0.3)$.

Результат.

Множество **М** явно разделяется на два кластера I: = (0.8, 0.7, 0.4); (0.6, 0.9, 0.9) и

II: = (0.3, 0.4, 0.1); (0.1, 0.1, 0.3).

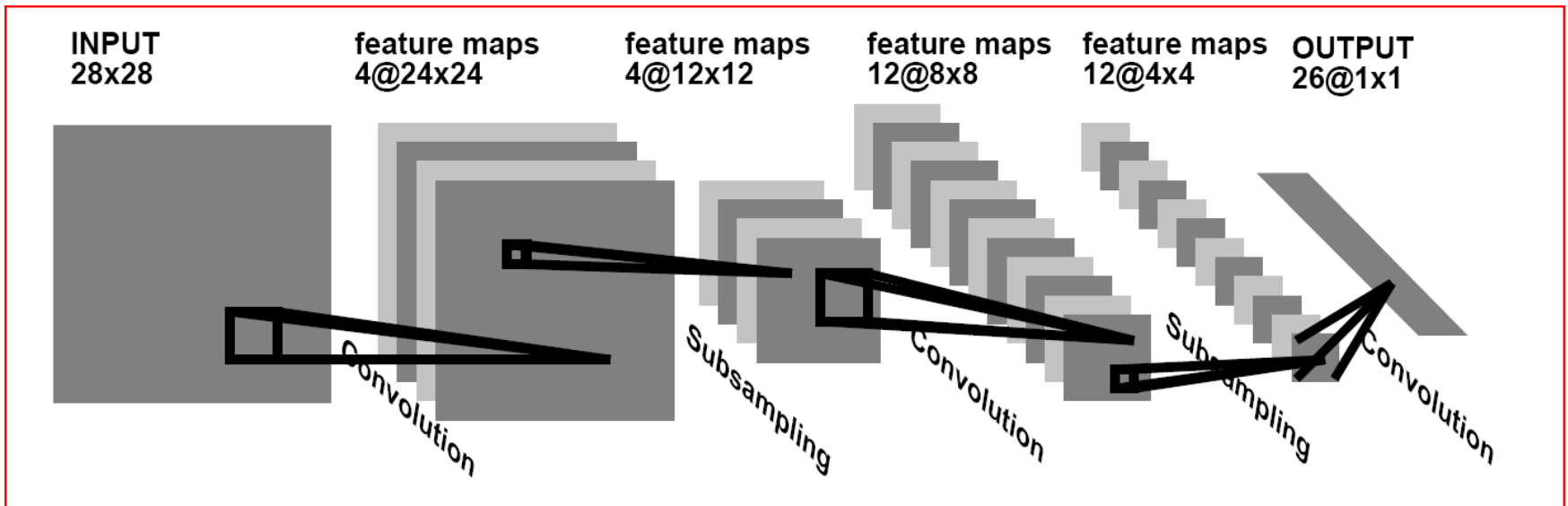
Средние значения признаков в кластерах: I = (0.7, 0.8, 0.65), II = (0.2, 0.25, 0.2).

После четырех шагов веса нейронов $\mathbf{w}_1 = (0.625, 0.775, 0.750)$ и $\mathbf{w}_2 = (0.225, 0.2, 0.3)$

стали ближе к средним значениям признаков кластеров I и II соответственно.

Сверточная нейронная сеть

Предложена Яном Лекуном (1998г) для распознавания изображений. Идея состоит в чередовании сверточных слоев (*convolution layers*) и субдискретизирующих слоев (*subsampling*) или слоёв подвыборки.



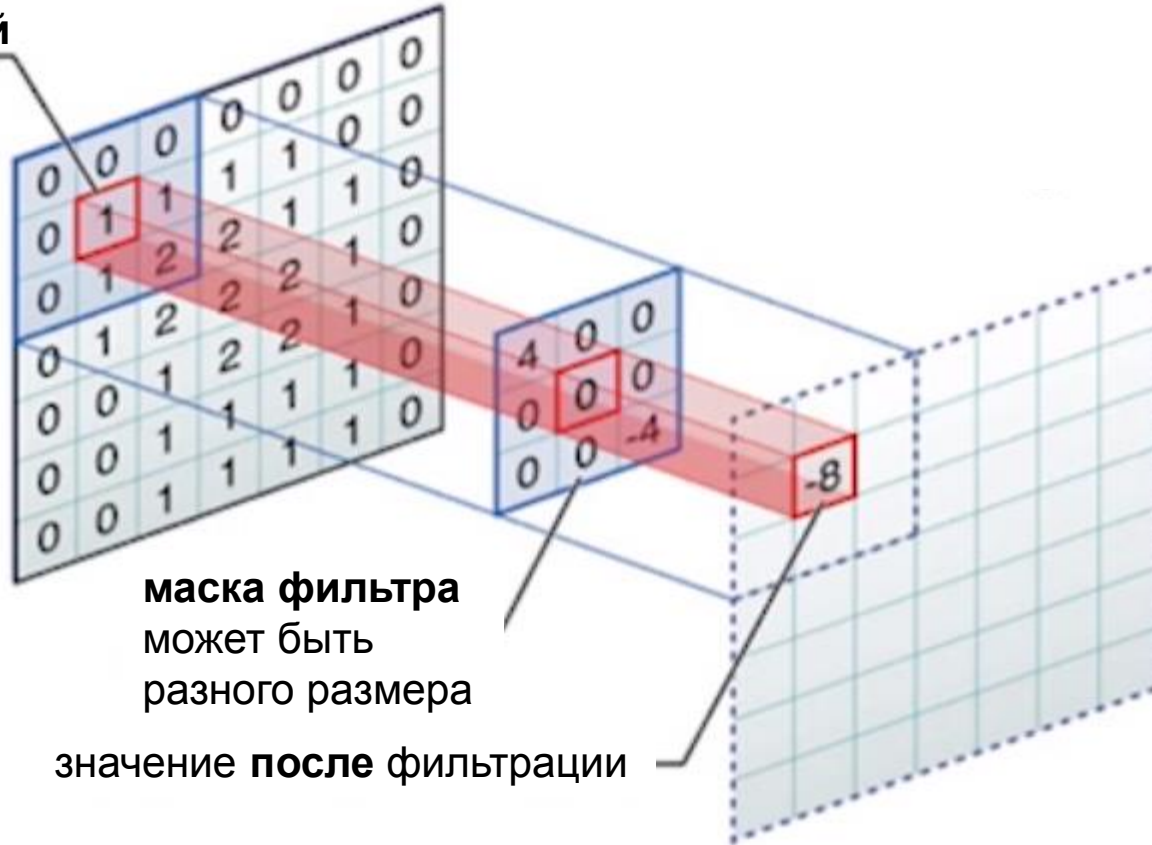
Проблемы: выбор числа слоев и задание их структуры

Для обучения предлагается база изображений различных объектов: люди, собаки, автомобили, цветы и т.д. Сеть должна научиться отличать эти классы

Сверточный слой

Задача – выделить характерные фрагменты

текущий
пиксель



$$\begin{array}{r}
 (4 \times 0) \\
 (0 \times 0) \\
 (0 \times 0) \\
 (0 \times 0) \\
 (0 \times 1) \\
 (0 \times 1) \\
 (0 \times 0) \\
 (0 \times 1) \\
 \hline
 + (-4 \times 2) \\
 \hline
 -8
 \end{array}$$

Все изображение обрабатывается одним фильтром – получаем один слой, т.е. сколько фильтров – столько слоев после свертки исходного изображения. Коэффициенты маски каждого фильтра изменяются в процессе обучения обратным распространением ошибки. Начальная настройка коэффициентов - случайные значения в заданном диапазоне. Функция активации **нелинейная** относительно результата свертки (сигмоида или др.)

Субдискретизирующий слой

Задача – уменьшить размерность каждого слоя

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 2 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

Максимум из четырех значений



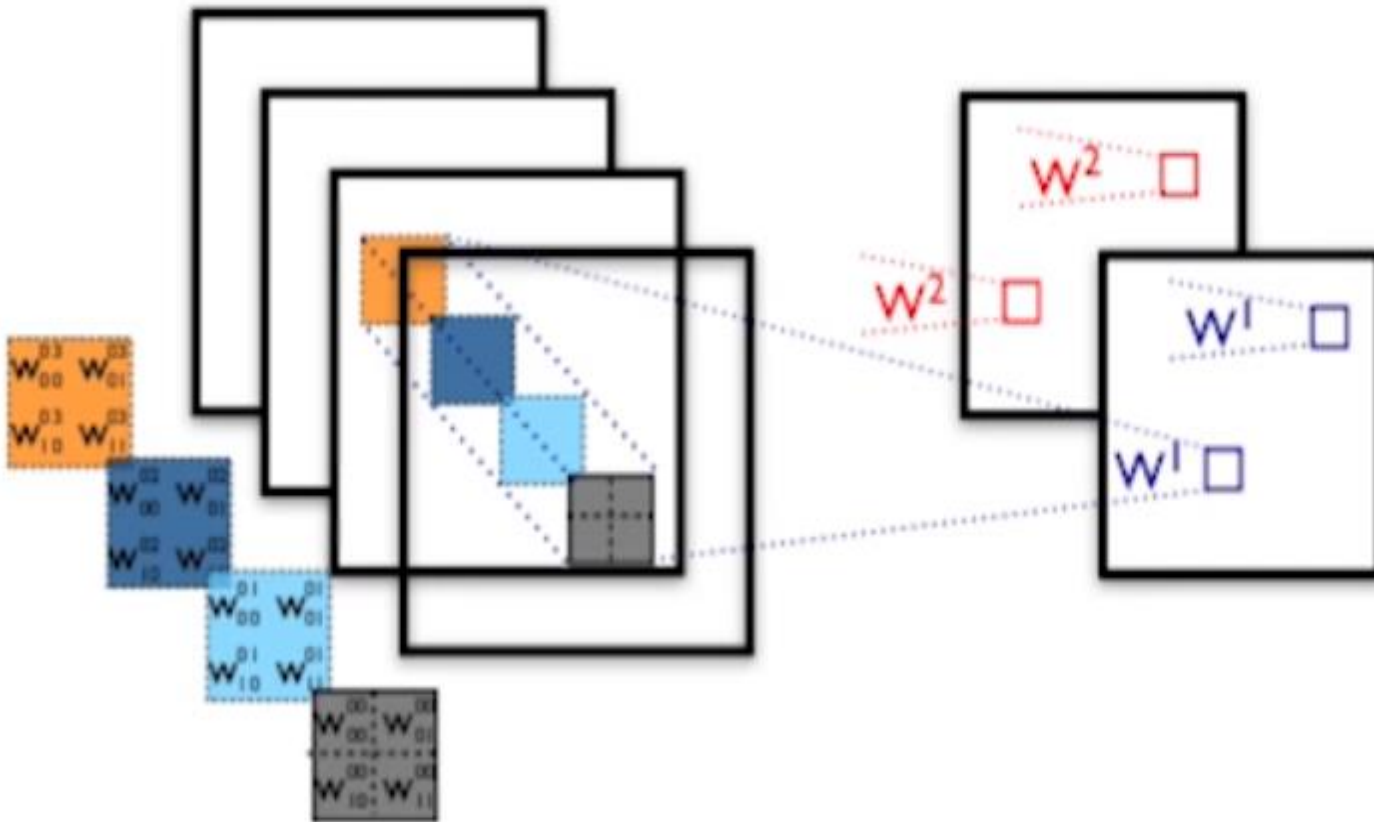
| | |
|---|---|
| 6 | 8 |
| 3 | 4 |

Постое усреднение возможно,
но менее эффективно

Замечание. Возможно выбирать максимум и из большего числа соседних нейронов. В сверточном слое размер каждой маски может быть разным. Маска может передвигаться и скачками через несколько нейронов

Свертка трехмерным фильтром

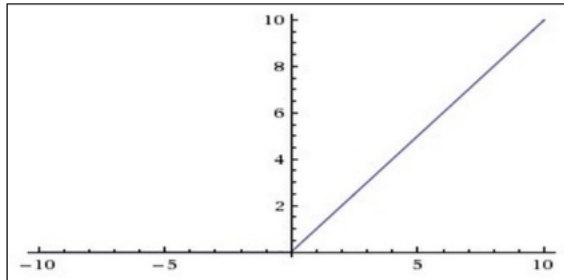
Задача – выявить интегральные признаки



Для каждого выходного слоя (w^1 , w^2 ...) свои настраиваемые коэффициенты фильтра
Например, для полноцветного изображения (RGB) на выходе слоя могут суммироваться результаты трех фильтров – для каждого цветового канала свой фильтр

Функции активации нейрона

ReLU (rectified linear unit)



$$f(s) = \max(0, s)$$

$$f'(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ \text{rand}(0.01, 0.05), & s \leq 0 \end{cases}$$

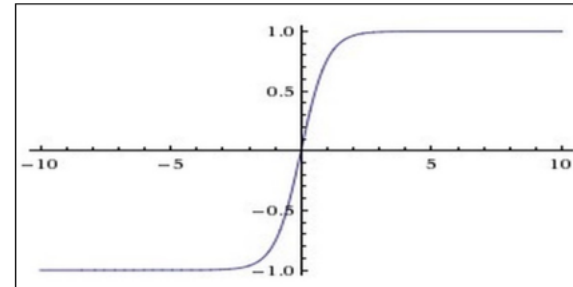
Достоинства

- лишена ресурсоемких операций
- отсекает ненужные детали
- отсутствует разрастание/затухание градиента
- быстрое обучение

Недостатки

- не всегда надежна, в процессе обучения может "умирать"
- сильно зависима от инициализации весов

Гиперболический тангенс



$$f(s) = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}$$

$$f'(s) = 1 - f(s)^2$$

Достоинства

- простое вычисление производной через значение своей функции
- область значений от -1 до 1

Недостатки

- затухание или увеличение градиента
- ресурсоемкая по сравнению с ReLU

Линейная функция часто используется для активации нейронов сверточного слоя
Гиперболический тангенс как и сигмоида используется для полносвязных слоев

Обучение сверточной сети

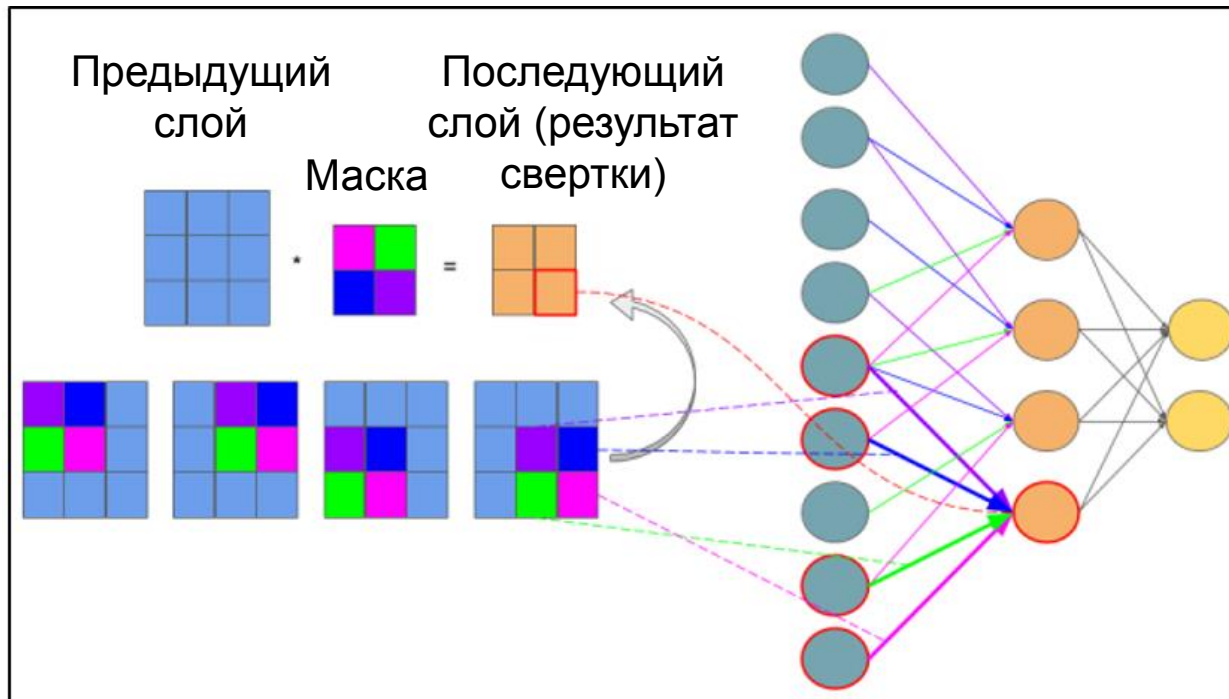
Обучение методом обратного распространения ошибки

Полносвязные слои обучаются как в рассмотренной ранее многослойной нейросети

Субдискретизирующие слои – ошибка передается нейрону с максимальным значением (с учетом функции активации), остальные три нейрона получают нулевую ошибку

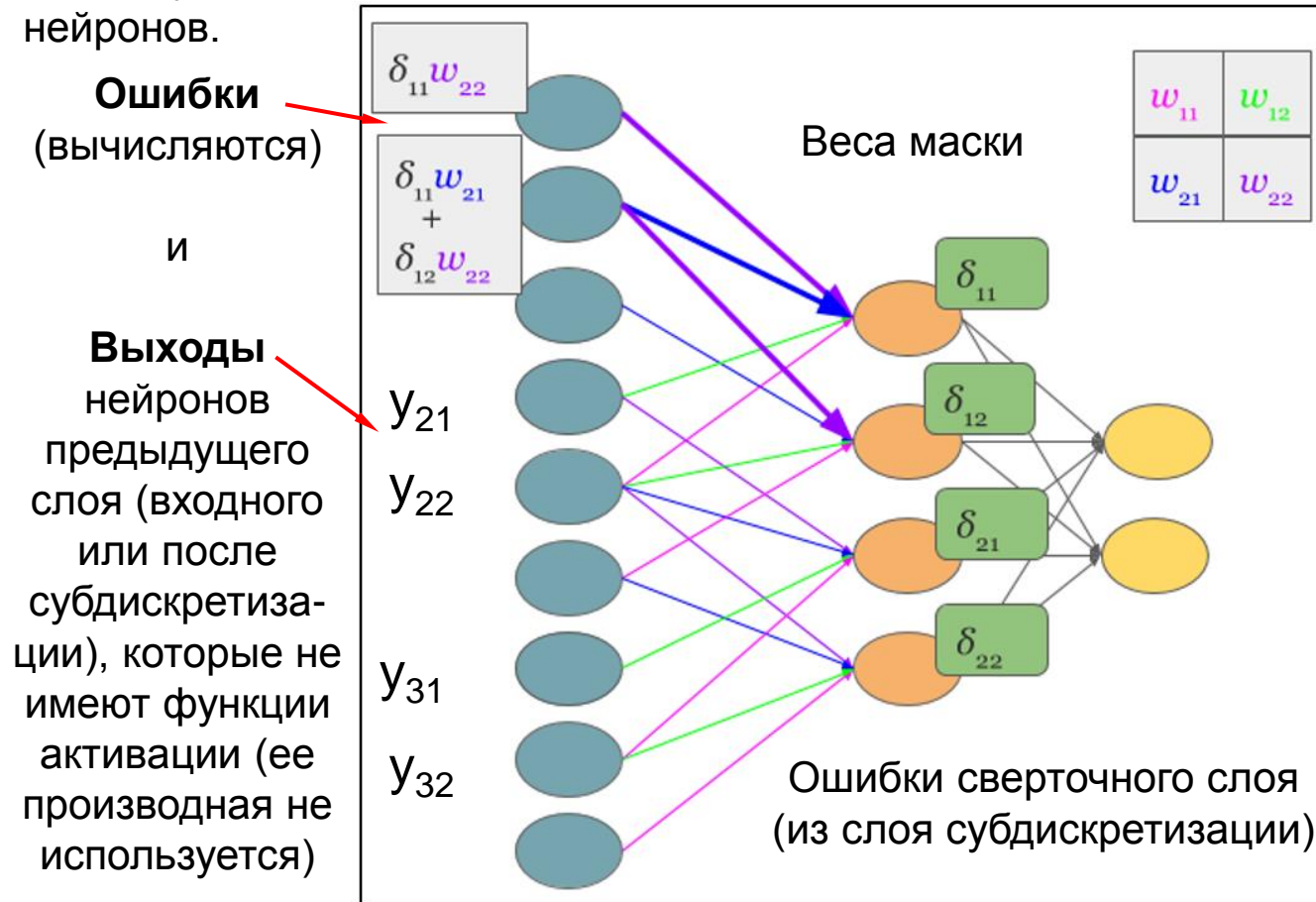
Сверточные слои – изменяются веса элементов каждой маски в соответствии с ошибками тех нейронов слоя, в получении значений которых они участвуют

Представление свертки в форме одного слоя нейросети



Обучение сверточной сети*

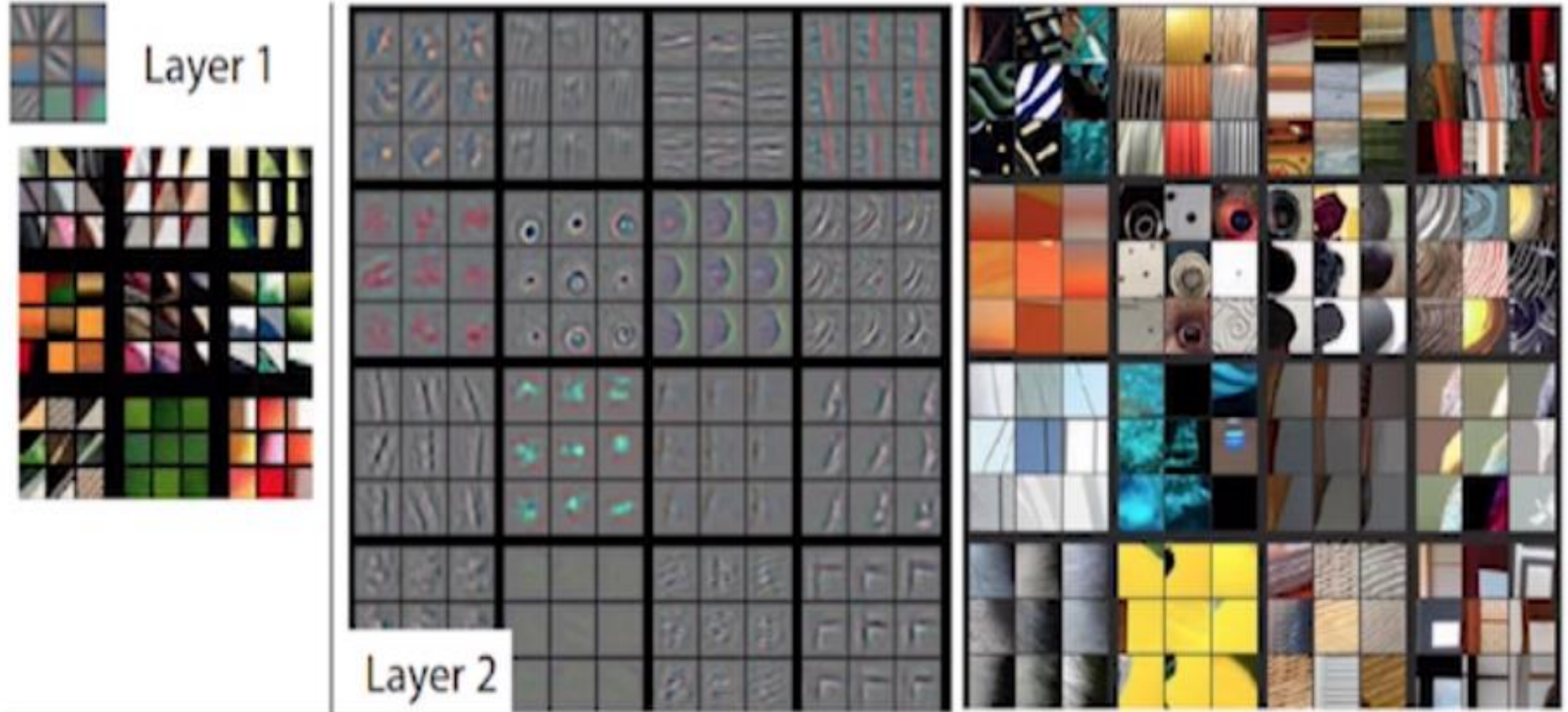
Вычисление ошибок каждого нейрона происходит так же, как и в скрытом слое полносвязной сети. Имея ошибки последующего (сверточного) слоя можно вычислить ошибки предыдущего слоя и изменить веса масок в соответствии с ошибками, связанных с ними нейронов.



Основное отличие от полносвязной сети – **каждый вес маски** влияет на ошибки **ВСЕХ** тех нейронов из сверточного слоя, которые связаны с данным весом маски.
Пример: $W'_{12} = W_{12} + \eta(\delta_{11}y_{21} + \delta_{12}y_{22} + \delta_{21}y_{31} + \delta_{22}y_{32})$

*<https://habr.com/ru/post/348028/> – Сверточная нейронная сеть, часть 2: обучение алгоритмом обратного распространения ошибки

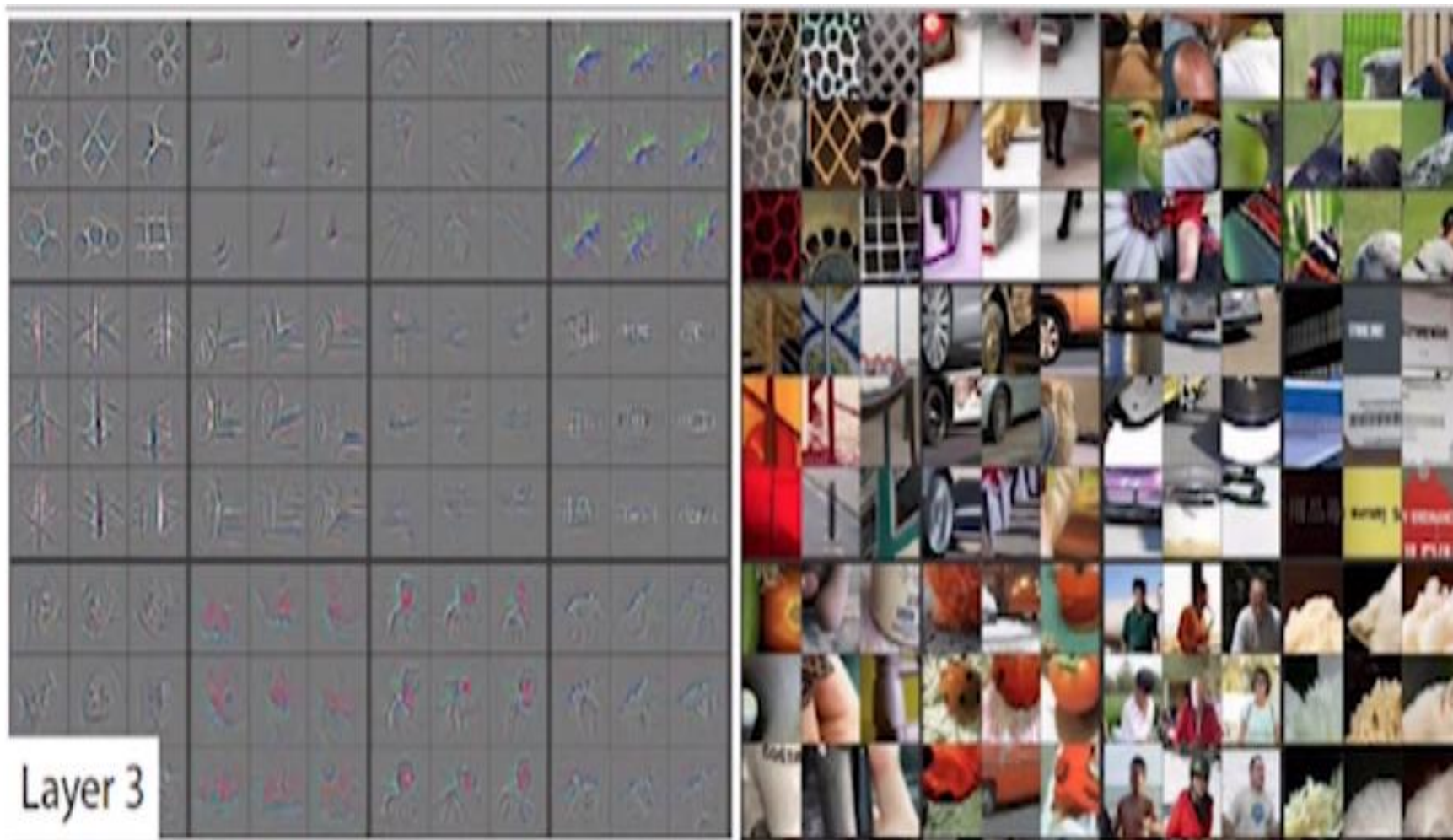
Результат обучения*



Визуализация значений масок фильтров (нейронов) на разных уровнях и фрагментов изображений, на которых эти нейроны активны
На первом слое нейроны обучаются фильтрации перепадов яркости
Выделяются похожие области (фрагменты объектов)

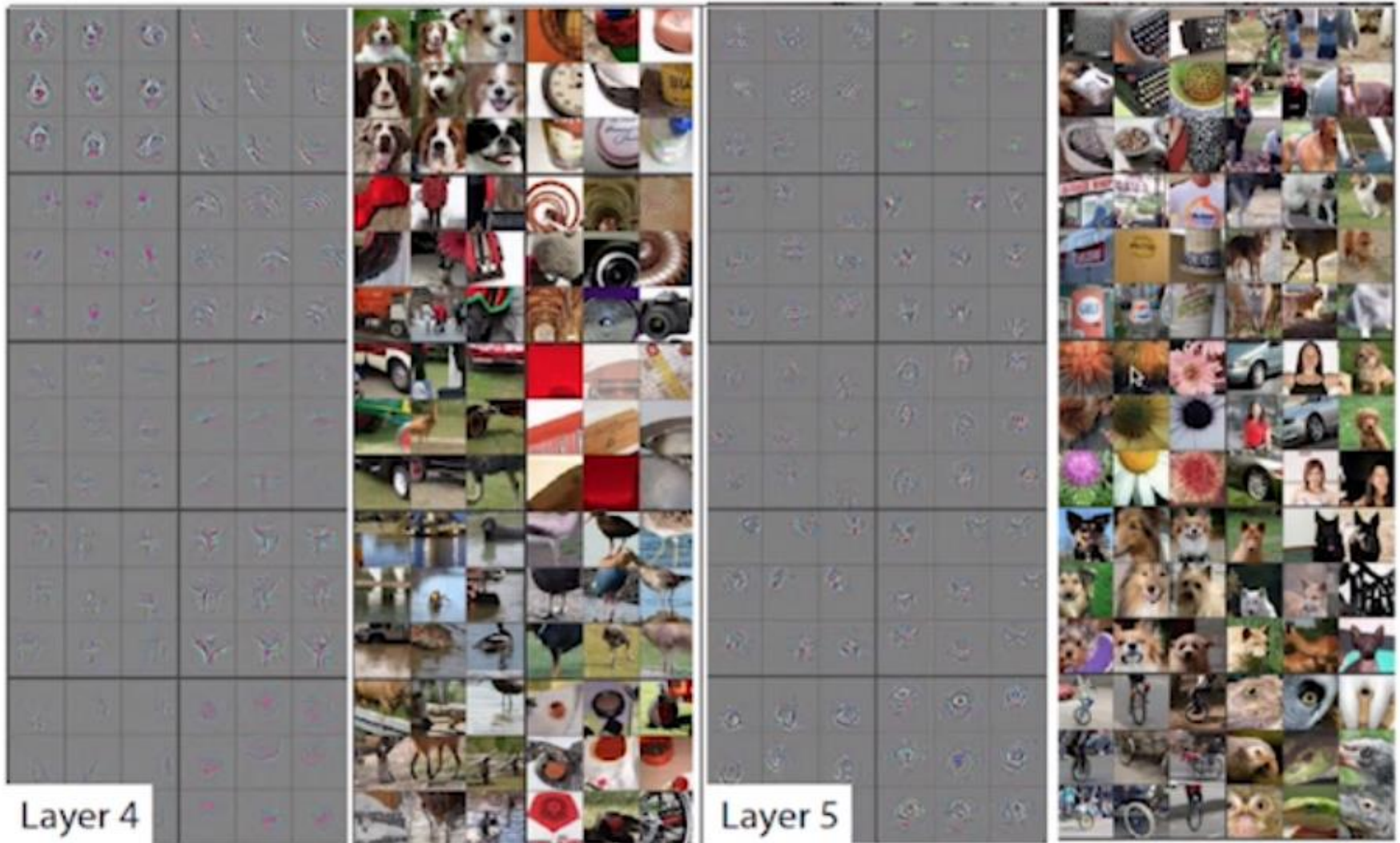
* <https://arxiv.org/pdf/1311.2901v3.pdf> – Matthew D. Zeiler Rob Fergus. Visualizing and Understanding Convolutional Networks

Результат обучения



Структура фильтров усложняется
Выделяются изображения объектов

Результат обучения



Фильтры приближаются к узнаваемым изображениям

Применение нейронных сетей*

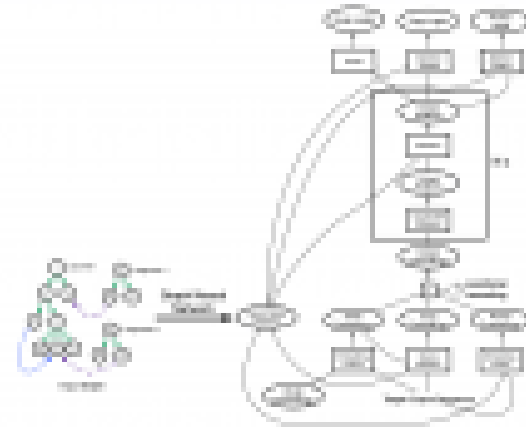
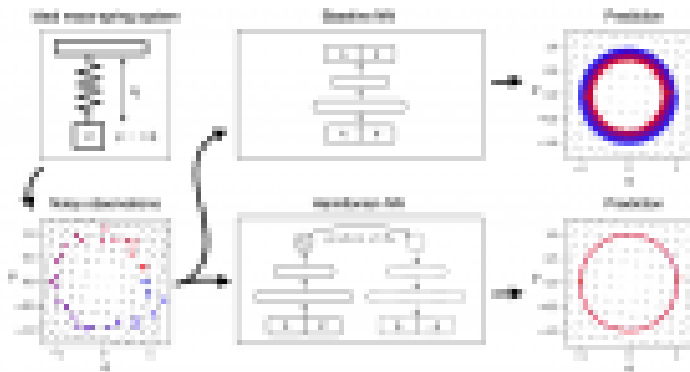
MarioNETte: нейросеть меняет выражение лица на изображении (22 ноября 2019)



BodyPix: сегментация людей в реальном времени с TensorFlow.js (21 ноября 2019)



Graph2Diff: нейросеть исправляет ошибки в коде (15 ноября 2019)



Нейросеть выучивает базовые физические законы (14 ноября 2019)